الخاصة الثامنة: المؤثر التفاضلي العكسي والدوال الزائدية $chax$, $shax$

نميز حالتين:

أ- المؤثر التفاضلي العكسي يحتوي على قوى D الزوجية

$$\frac{1}{\varphi(D^2)} \begin{matrix} ch \\ sh \end{matrix} ax = \frac{1}{\varphi(a^2)} \begin{matrix} ch \\ sh \end{matrix} ax \quad , \varphi(a^2) \neq 0$$

الإثبات: لنثبت صحة إحدى العلاقتين السابقتين:

$$\frac{1}{\varphi(D^2)} \cdot shax = \frac{1}{\varphi(D^2)} \cdot chax$$

من أجل ذلك نعلم أن:

$$\varphi(D^2) \cdot shax = \varphi(a^2) \cdot shax$$

لنؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي العكسي فنجد أن:

$$\frac{1}{\varphi(D^2)} \cdot \varphi(D^2) \cdot shax = \frac{1}{\varphi(D^2)} \cdot \varphi(a^2) \cdot shax$$

أي أن:

$$shax = \varphi(a^2) \cdot \frac{1}{\varphi(D^2)} \cdot shax$$

نقسم الطرفين على $\varphi(a^2) \neq 0$

$$\frac{1}{\varphi(a^2)} \cdot shax = \frac{1}{\varphi(D^2)} \cdot shax \qquad \varphi(a^2) \neq 0$$

★ العلاقة الثانية يتم إثباتها بشكل مشابه تماماً.

★ أما في الحالة عندما $\varphi(a^2)=0$ أو المؤثر التفاضلي العكسي يحتوي على قوى D الفردية عندئذٍ نستعيض عن $shax$ أو $chax$ بدلالة الدوال الأسية.

نحو هذه الحالة نستعيض عن $shax$ بـ $\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$

و $chax$ بـ $\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}$

مثال توضيحي: أوجد ناتج: $\frac{1}{D^4+1} \cdot shx$ ؟ .

$\varphi(D) = D^4 + 1 \Rightarrow \varphi(1) = 1 + 1 = 2 \neq 0$

$= \frac{1}{2} sh\,x$

5. $\frac{1}{D^4 - 3D^2 + 1} \cdot sh2x = \frac{1}{16 - 12 + 1} \cdot sh2x = \frac{1}{5} \cdot sh2x$

أوجد ناتج *

1. $\frac{1}{D^3 + 2D^2 - 2D + 1} ch\,x$

$\frac{1}{D^3 + 2D^2 - 2D + 1} \cdot chx = \frac{1}{D \cdot D^2 + 2D^2 - 2D + 1} \cdot chx$ 1ط

$= \frac{1}{D - 2D + 2 + 1} \cdot chx = \frac{1}{-D + 3} \cdot chx$

$\frac{1}{D - m} \cdot chax = \frac{1}{a^2 - m^2} [a \cdot shax + m \cdot chax]$

$= -\frac{1}{D - 3} \cdot chx = -\frac{1}{1 - 9} [sh\,x + 3chx] = \frac{1}{8} shx + \frac{3}{8} chx$

$\frac{1}{D^3 + 2D^2 - 2D + 1} \cdot sh\,x = \frac{1}{D^3 + 2D^2 - 2D + 1} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 2ط

$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{D^3 + 2D^2 - 2D + 1} \cdot e^x + \frac{1}{D^3 + 2D^2 - 2D + 1} e^{-x} \right]$

$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{-1 + 2 + 2 + 1} e^{-x} \right] = \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{8} \cdot e^{-x}$

للتأكد:

$\frac{1}{8} sh\,x + \frac{3}{8} \cdot chx = \frac{1}{8} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$

$= \frac{1}{16} e^x - \frac{1}{16} e^{-x} + \frac{3}{16} e^x + \frac{3}{16} e^{-x} = \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{8} e^{-x}$

SUBJECT:

الخاصة التاسعة: المؤثرات التفاضلية العكسية وكثيرات الحدود.

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot p(x).$$

حيث $p(x)$ كثير حدود من الدرجة k

أي أنه $p(x) = a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \text{———} + a_1 x + a_0$

وحيث $a_k \neq 0$

لنفرض أن كثير الحدود $\varphi(D)$ من الدرجة ℓ أي أن

$$\varphi(D) = b_\ell \cdot D^\ell + b_{\ell-1} \cdot D^{\ell-1} + \text{———} + b_1 \cdot D + b_0$$

عندئذ لإيجاد ناتج:

$$\frac{1}{b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \text{———} b_\ell \cdot D^\ell} (a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \text{———} + a_1 x + a_0)$$

نميز حالتين:

-1- $b_0 \neq 0$ في هذه الحالة نقسم البسط على المقام

مثال -1- $\frac{1}{1+D+D^3} \cdot x^4$

$$\begin{array}{l|l}
1+D+D^3 & 1 - D + D^2 - 2D^3 + 3D^4 \\
\hline
 & 1 \\
 & -1 \mp D \mp D^3 \\
 & 0 - D - D^3 \\
 & \pm D \pm D^2 \pm D^4 \\
 & 0 + D^2 - D^3 + D^4 \\
 & \mp D^2 \mp D^3 \mp D^5 \\
 & 0 - 2D^3 + D^4 - D^5 \\
 & \pm 2D^3 \pm 2D^4 \pm 2D^6 \\
 & 0 \quad 3D^4 - D^5 + 2D^6 \\
 & -3D^4 \mp 3D^5 \mp 3D^7 \\
 & 0 \quad -4D^5 + 2D^6 - 3D^7
\end{array}$$

المشتقة عند $D^5 = 0$ في المعادلة من الدرجة 4

تقف عند التقسيم.

-2- $\frac{1}{1+D^3} \cdot x^2$

$$\begin{array}{r} 1 - D^3 \\ 1 + D^3 \,\overline{)\, 1 \qquad\quad} \\ \underline{-1 \mp D^3} \\ -D^3 \\ \underline{\pm D^3 \pm D^6} \\ 0 \quad D^6 \end{array}$$

بالامتحان: أجد

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{———} + x^n + \text{———} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \text{———} (-1)^n . x^n - \text{—} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . x^n$$

مثال:

$$\frac{1}{1+D^3} x^2 = (1 - D^3) . x^2 = x^2 - 0$$

أ- $b_0 \neq 0$ في هذه الحالة نقسم البسط على المقام ونستمر في عملية القسمة إلى أن نحصل على حد D له أكبر من درجة كثير الحدود

أو نعلم بأن $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

ونكتفي من حدود المتسلسلة إلى الحد الذي له يساوي أو أقل من درجة كثير الحدود.

لأن $D^{\ell} . x^n = 0 \quad \ell > n$

ب- $b_0 = 0$ عندما يكون الحد المطلق معدوم في هذه الحالة نخرج D عامل مشترك بأصغر أس نحصل على جداء كثير حدود أحدهما من الشكل D^{ℓ} والآخر من الشكل: $(b_{\ell} + b_{\ell-1} . D + \text{———} b_k . D^{k-\ell})$.

مثال:

$$\frac{1}{D^3 + D^5} . x^3 = \frac{1}{D^3} . \frac{1}{(1 + D^2)} x^3$$

$$= \frac{1}{D^3} [1 - D^2 + D^4] x^3$$

نوجد أولاً:

$$\frac{1}{b_{\ell} + b_{\ell-1} D + \text{—} + b_k D^{k-\ell}} . P(x)$$

ومن ثم نوجه ناتج تأثير $\frac{1}{D^4}$ على الناتج الذي حصلنا عليه من الخطوة السابقة
أي نحصل f مرة متتالية.

مثال: أوجد ناتج

1- $\frac{1}{D^2-3D+1}(x^3+2x)$

ط

$= \frac{1}{1-3D+D^2}\cdot(x^3+2x)$

$$\begin{array}{r} 1+3D+8D^2+21D^3 \\ 1-3D+D^2 \overline{)\ 1 \qquad\qquad\qquad} \\ -1 \mp 3D \mp D^2 \\ \hline 0 \quad 3D - D^2 \\ -3D \mp 9D^2 \pm 3D^3 \\ \hline 0 \quad 8D^2 - 3D^3 \\ -8D^2 \mp 24D^3 \pm 8D^4 \\ \hline 0 \quad 21D^3 - 8D^4 \\ -21D^3 \mp 63D^4 \pm 21D^5 \\ \hline 55D^4 - 21D^5 \end{array}$$

$= (1+3D+8D^2+21D^3)(x^3+2x)$

$= (1+3D+8D^2+21D^3)x^3 + 2(1+3D+8D^2+21D^3)x$

$= x^3+9x^2+48x+126+2(x+3)$

$= x^3+9x^2+50x+132$

ط باستخدام متسلسلة القوى:

$\frac{1}{1-3D+D^2}\cdot(x^3+2x)$

$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-(3D-D^2)}\cdot x^3+2x = (1+(3D-D^2)+(3D-D^2)^2+(3D-D^2)^3)\cdot(x^3+2x)$

$= x^3+2x+[3D(x^3+2x) - D^2(x^3+2x) + 9D^2(x^3+2x)$
$-6D^3(x^3+2x) + D^4(x^3+2x) + 27D^3(x^3+2x)$

($D^4(x^3+2x) = 0$)

$(3D-D^2)^3 = (3D)^3 - 3(3D)^2 D^2 + 3(3D)\cdot D^4 - D^6$

($= 0$)

SUBJECT: / /

$= X^3 + 2X + 3(3X^2 + 2) - (6X) + 9(6X) - 6(6) + 27(6)$

$= X^3 + 2X + 9X^2 + 6 - 6X + 54X - 36 + 162$

$= X^3 + 9X^2 + 50X + 132$

-٢- أوجد ناتج $\frac{1}{D^4 + 3D^3} \cdot X^4$

$= \frac{1}{D^3} \cdot \frac{1}{3+D} \cdot X^4 = \frac{1}{3D^3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}D} \cdot X^4$

وبالاعتماد على العلاقة $\frac{1}{1+D} = 1 - D + D^2 - D^3 + D^4$ نجد أن

$\frac{1}{3D^3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}D} \cdot X^4 = \frac{1}{3D^3}\left[1 - \frac{1}{3}D + \frac{1}{9}D^2 - \frac{1}{27}D^3 + \frac{1}{81}D^4\right]X^4$

$= \frac{1}{3D^3}\left[X^4 - \frac{4}{3}X^3 + \frac{12}{9}X^2 - \frac{24}{27}X + \frac{24}{81}\right]$

$\int = \frac{1}{3D^2}\left[\frac{X^5}{5} - \frac{1}{3}X^4 + \frac{4}{9}X^3 - \frac{12}{27}X^2 + \frac{24}{81}X\right]$

$\int = \frac{1}{3D}\left[\frac{X^6}{30} - \frac{X^5}{15} + \frac{1}{9}X^4 - \frac{4}{27}X^3 + \frac{12}{81}X^2\right]$

$\int = \frac{1}{3}\left[\frac{X^7}{210} - \frac{X^6}{90} + \frac{1}{45}X^5 - \frac{1}{27}X^4 + \frac{4}{81}X^3\right]$

الخاصة العاشرة: المؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{\varphi(D)}$ وتأثيره على جداء دالتين احداهما هو الدالة X

$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot X \cdot u(x) = X \cdot \frac{1}{\varphi(D)} \cdot u(x) - \frac{\varphi'(D)}{\varphi^2(D)} \cdot u(x)$

الإثبات: نعلم أن $\varphi(D) \cdot X \cdot u = X \cdot \varphi(D) \cdot u + \varphi'(D) \cdot u$

لنفرض أن : $\mathcal{U}(x) = \varphi(D).u \Leftarrow u = \frac{1}{\varphi(D)}.\mathcal{U}(x)$

$$\varphi(D).X.u = X.\mathcal{U} + \varphi'(D).u$$

أي أن

$$X.\mathcal{U} = \varphi(D).X.u - \varphi'(D).u$$

نؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{\varphi(D)}$

$$\frac{1}{\varphi(D)}.X.\mathcal{U} = X.u - \frac{\varphi'(D)}{\varphi(D)}.u$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varphi(D)}.X.\mathcal{U} = x.\frac{1}{\varphi(D)}.\mathcal{U} - \frac{\varphi'(D)}{\varphi^2(D)}.\mathcal{U}$$

مثال ١ أوجد ناتج مايلي بطريقتين مختلفتين :

$$\frac{1}{D^2-2D+2}.Xe^X$$

ط١ اعتماداً على الخاصة العاشرة والأخيرة :

$$\frac{1}{\varphi(D)}.X.\mathcal{U}(x) = x.\frac{1}{\varphi(D)}.\mathcal{U}(x) - \frac{\varphi'(D)}{\varphi^2(D)}.\mathcal{U}(x)$$

$D=M=1$

أي أن

$$\frac{1}{D^2-2D+2}.X.e^x = x.\frac{1}{D^2-2D+2}.e^x - \frac{2D-2}{(D^2-2D+2)^2}.e^x$$

$$= x\frac{1}{1-2+2}.e^x - \frac{2D-2}{(1-2+2)^2}.e^x$$

$$= xe^x - (2D-2).e^x = xe^x$$

($2D-2 = 0$)

ط٢ اعتماداً على خاصة الإزاحة الأسية :

$$\frac{1}{D^2-2D+2}Xe^x = e^x.\frac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+2}X$$

$$= e^x.\frac{1}{D^2+2D+1-2D-2+2}.X = e^x.\frac{1}{1+D^2}.X$$

$= e^x[1-D^2]\, x = e^x(x-0) = xe^x$ *

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة n المتجانسة ذات المعاملات الثابتة:

الشكل العام لهذا النوع من المعادلات هو:

$$y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + \text{———} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0 \qquad (1)$$

وباستخدام المؤثر التفاضلي D تكتب المعادلة (1) على النحو:

$$(D^n + a_{n-1} \cdot D^{n-1} + \text{———} + a_1 \cdot D' + a_0)\, y = 0$$

أو اختصاراً على الشكل:

$$\varphi(D) \cdot y = 0$$

حيث $a_n = 1$ $\qquad \varphi(D) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot D^j$

و حيث $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ أعداد حقيقية

نعلم بأن: $\varphi(D) \cdot e^{mx} = \varphi(M) \cdot e^{mx}$

أي أن الدالة e^{mx} تكون حلاً للمعادلة $\varphi(D) y = 0$ إذا وفقط إذا كان $\varphi(M) \cdot e^{mx} = 0$

ومن المساواة الأخيرة نستنتج أن $\varphi(M) = 0$ وهذه المعادلة $\varphi(M) = 0$ تدعى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (1).

مثلاً المعادلة التفاضلية

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

المعادلة المميزة لها هي

$$M^2 - 3M + 2 = 0$$

كما أن المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية

$$y''' - 6y'' + 2y' - y = 0$$

هي

$$M^3 - 6M^2 + 2M - 1 = 0$$

أ- جميع جذور المعادلة التفاضلية حقيقية ومختلفة مثنى مثنى ولنناقش الحالات المختلفة لجذور المعادلة المميزة:

SUBJECT:

أولاً: الجذور حقيقية ومختلفة مثنى مثنى عندئذ تكون الدوال :

$$y_1 = e^{m_1 x} , \quad y_2 = e^{m_2 x} \text{———} \quad y_n = e^{m_n x}$$

قاعدة حلول للمعادلة التفاضلية المعطاة لأنه كل دالة من هذه الدوال تحقق المعادلة التفاضلية

ثانياً: عدد الدوال يساوي رتبة المعادلة التفاضلية.

ثالثاً: هذه الدوال مستقلة خطياً لأنه ،

$$W(y_1, y_2, \text{———} y_n) = \begin{vmatrix} e^{M_1 x} & e^{M_2 x} & e^{M_n x} \\ M_1 \cdot e^{M_1 x} & M_2 \cdot e^{M_2 x} & M_n \cdot e^{M_n x} \\ M_1^2 \cdot e^{M_1 x} & M_2^2 \cdot e^{M_2 x} & M_n^2 \cdot e^{M_n x} \\ \vdots & & \\ M_1^{n-1} \cdot e^{M_1 x} & M_2^{n-1} \cdot e^{M_2 x} & M_n^{n-1} \cdot e^{M_n x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(M_1 + M_2 \text{———} + M_n) x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ M_1 & M_2 & M_n \\ M_1^2 & M_2^2 & M_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M_1^{n-1} & M_2^{n-1} & M_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

والمحدد الموجود هو عبارة عن محدد (فاندرموند)

$$= e^{(m_1 + m_2 + \text{———} + m_n) x} (M_1 - M_2)(M_1 - M_3) \text{———} (M_1 - M_n)(M_2 - M_3) \text{———} (M_2 - M_n)$$
$$\text{———} (M_{n-1} - M_n)$$

وبما أن الجذور مختلفة مثنى مثنى نستنتج أن $W(y_1, y_2, \text{———}, y_n) \neq 0$ أي أن الدوال $y_1, y_2, \text{———}, y_n$ مستقلة خطياً لأنه حسب عدد شروطه لا يساوي الصفر

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة (I) يكون من الشكل :

$$y_h = c_1 e^{m_1 x} + c_2 \cdot e^{m_2 x} + \text{———} + c_n \cdot e^{M_n x}$$

AL DOUHA

SUBJECT: / /

٢- أ جد جذور المعادلة المميزة عقدي

لتكن المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (I) هي

$$M^n + a_{n-1} M^{n-1} + \text{——} + a_1 M + a_0 = 0$$

إذا كان M_1 جذر للمعادلة المميزة عقدي أي من الشكل $M_1 = \alpha + i\beta$

عندئذ يكون المرافقه أيضاً جذر للمعادلة المميزة أي يكون $M_2 = \alpha - i\beta$ هو جذر أيضاً للمعادلة المميزة.

أي أن

$$A_1 e^{M_1 x} + A_2 e^{M_2 x} = A_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + A_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$= A_1 e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} + A_2 e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = ~~A_1 \cos\beta x + A_2 \sin\beta~~$$

$$= e^{\alpha x}[A_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + A_2 \cdot (\cos\beta x - i\sin\beta x)]$$

$$= e^{\alpha x}[(A_1 + A_2)\cos\beta x + (iA_1 - iA_2) \cdot \sin\beta x]$$

أي أن الحل العام للمعادلة في هذه الحالة يكون من الشكل :

$$y_h = e^{\alpha x}(A_1 \cdot \cos\beta x) + e^{\alpha x}(A_2 \cdot \sin\beta x) + A_3 e^{m_3 x} + \text{——} + A_n \cdot e^{m_n x}$$